MAPSI — cours 1 : Rappels de probabilités et statistiques

Vincent Guigue

LIP6 – Université Paris 6, France

Buts de l'UE

- Fonctionnement de l'UE
- Rappels sur les base des probabilités et statistiques
- Modélisation de situations réelles (images...)
- Applications concrètes : classification automatique, régression...

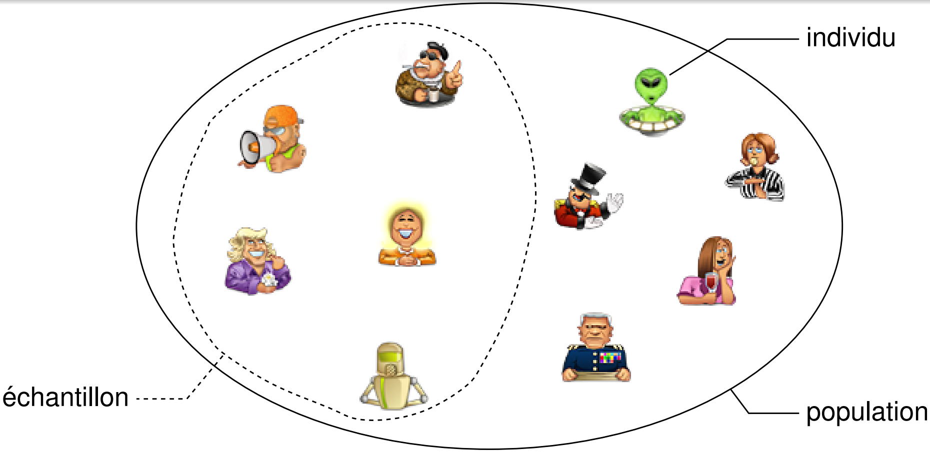
Règles de notation

Organisation :

- Cours : théorie & concepts, exemples
- TD : application & calcul sur feuille
- TME : mise en oeuvre des méthodes sur des mini-projets

Notation :

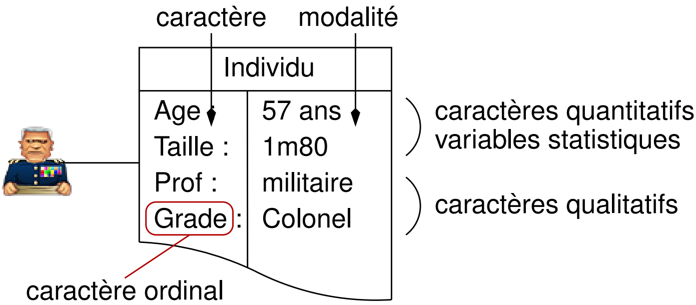
- Examen final : 60%
- Notes de projet & suivi de TME : 40%
  - Note de suivi en TME : 60% (24% du total)
  - Note de rapport de projet : 40% (16% du total)



Définitions

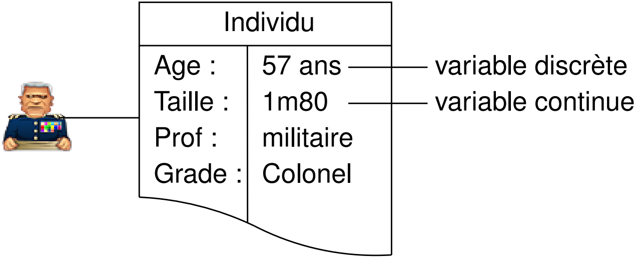
- population (statistique) : ensemble des objets (ou personnes) sur lesquels porte l'étude
- individu : chaque élément de la population

Vocabulaire (2/3)



Définitions

- Caractères : critères d'étude de la population
- Modalités : les valeurs que peuvent prendre les caractères
- Caractère quantitatif ou Variable statistique : ensemble de modalités $=$ des nombres $+$ échelle mathématique
- Caractère qualitatif ou Variable catégorielle : caractère non quantitatif
- Caractère ordinal : les modalités sont ordonnées



Définitions sur les variables statistiques

- Variable discrète : définie sur un espace discret
  (par exemple des entiers)
- Variable continue : définie sur un continuum (toutes les valeurs
  numériques d'un intervalle)

Effectifs, fréquences et distributions

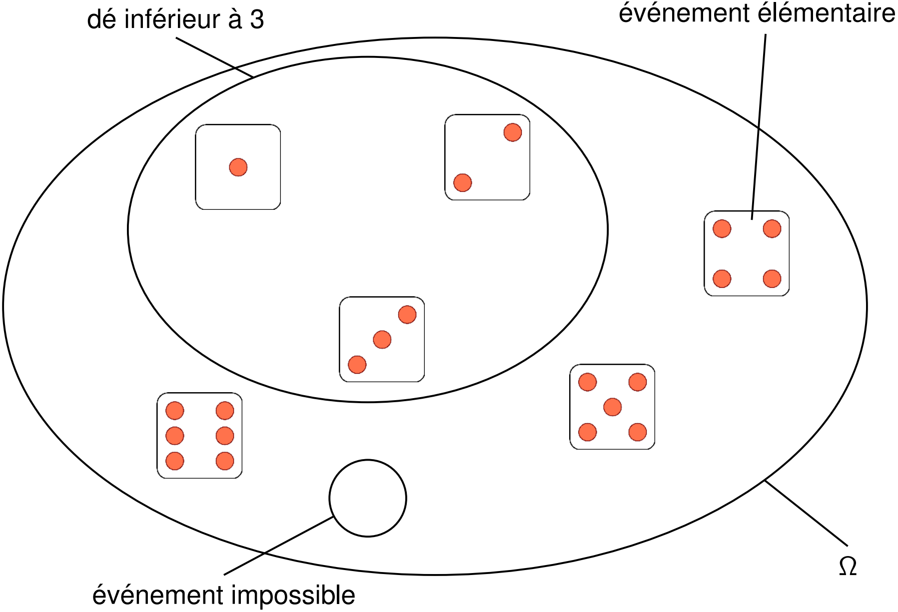
Quelques définitions de statistiques

- X : caractère défini sur une population de N individus
- $\{x_1, \dots, x_I\}$ modalités de X
- $N_i =$ effectif de x_i
  $\quad = $ nombre d'individus pour lesquels X a pris la valeur x_i
- fréquence ou effectif relatif : $f_i = \frac{N_i}{N}$
- distribution de X : ensemble des couples $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots\}$

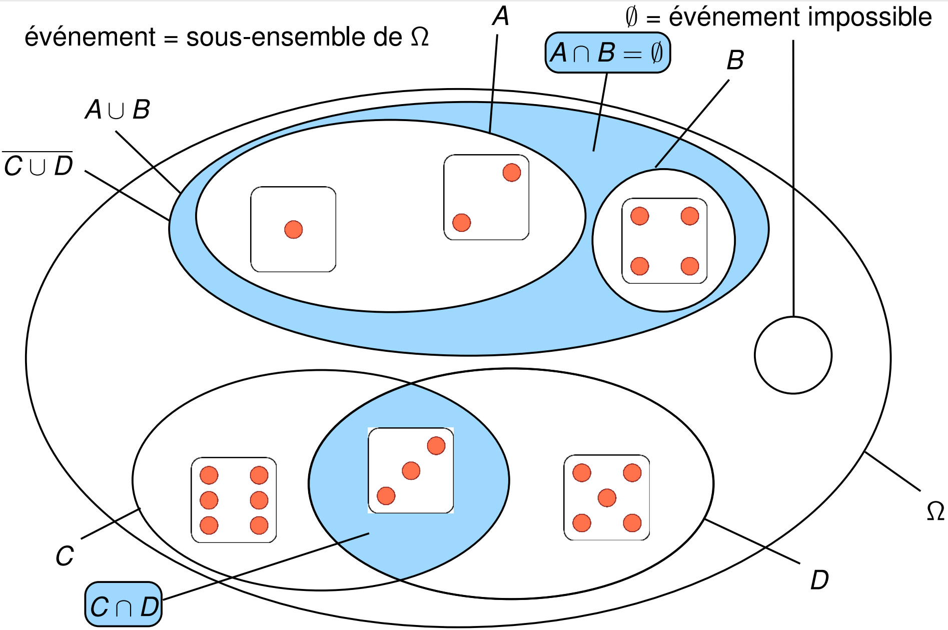
Représentation usuelle sous forme de tableau

Statistiques = description d'un échantillon
Probabilité = description d'une population.

Probabilités : approche évènementielle



événement = sous-ensemble de Ω



Notations ensemblistes :

- événements = sous-ensembles de Ω
- $\emptyset$ = événement impossible
- $A \cup B$ = événement qui est réalisé si A ou B est réalisé
- $C \cap D$ = événement qui est réalisé si C et D sont réalisés
- $\overline{C \cup D}$ = complémentaire de $C \cup D$ dans Ω

  = événement qui est réalisé ssi $C \cup D$ ne l'est pas
- $A \cap B = \emptyset$ = 2 événements qui ne peuvent se réaliser simultanément

Définition des probabilités (Kolmogorov)

- Ω = ensemble fini ou dénombrable d'événements élémentaires e_k, $k \in K \subseteq \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = 2^\Omega$ = ensemble des événements
- Mesure de probabilité : $\forall A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $A = \bigcup_{k \in L} A_k$, avec L ensemble dénombrable et, $\forall j, k \in L$, $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$,
  $$P(A) = \sum_{k \in L} P(A_k).$$

$\Longrightarrow$ Les probabilités des événements élémentaires déterminent entièrement P

conséquence : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Quelques définitions de probabilités

- **Univers** Ω : un ensemble dénombrable (fini ou infini)
- **Evènement** : un sous-ensemble de l'univers Ω
- **Mesure de probabilité** :
  une fonction qui associe à chaque évènement une valeur entre 0 et 1, la probabilité de Ω est 1, et la probabilité d'une union dénombrable d'évènements incompatibles (ensembles disjoints) est la somme de leurs probabilités.
- **Espace probabilisé** :
  un couple (Ω, P) où P est une mesure de probabilité sur Ω
- **Variable aléatoire**

Variable aléatoire

Lorsqu'on est face à une expérience aléatoire, on s'intéresse plus souvent à une *valeur* attribuée au résultat qu'au résultat lui-même.

Exemples

- Lorsque l'on joue à un jeu de hasard on s'intéresse plus au gain que l'on peut obtenir qu'au résultat du jeu.
- Nombre de pannes dans un ensemble de systèmes plutôt que l'état exact des systèmes

- Solution : "traduire" l'univers en évènements "compréhensibles".

$\Rightarrow$ variable aléatoire : application de l'univers Ω vers un autre ensemble.

Univers, Evènements et Variable Aléatoire (3/5)

Exemple du lancer de dé

On lance un dé après avoir misé 1*EUR*. Si le résultat est un 5 ou un 6 on double la mise, sinon perd la mise. Dans ce cas :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Card $\Omega = 6$, Card $\mathcal{P}(\Omega) = 2^6$, et $\forall e \in \Omega, P(e) = \frac{1}{6}$
- Soit X la *v.a.* qui associe à tout résultat du dé un *gain* :
  $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = -1$ et
  $X(5) = X(6) = (2 - 1) = 1$
  X est à valeur dans l'ensemble noté $\mathcal{X} = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$,
  $X : \Omega \to \mathcal{X}$
- Question :
  Comment calculer la probabilité de gagner 1*EUR* ?
- Réponse : Définir une probabilité sur $\mathcal{X}$, notée $\mathbb{P}$, en retournant dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
  i.e. utiliser $P($*résultat du dé* $=5$ *ou* $6)$ pour estimer $\mathbb{P}(\{1\})$.

Définition Variable aléatoire à valeurs discrètes

Soit Ω un ensemble dénombrable, et P une mesure de probabilité sur Ω.
Soit Ω', un ensemble discret. Une variable aléatoire est une fonction X de Ω muni de la mesure P vers Ω'.

Exemples

- Lancer d'un dé :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}$ muni de la probabilité uniforme P.
  $$X : i \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{0, 1\}$.
- Lancer de deux dés :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : (i, j) \mapsto i + j$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{2, ..., 12\}$

Définitions : Loi de probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé où Ω est dénombrable.
Soit Ω' un ensemble discret, et X une v.a. de (Ω, P) vers Ω'.

- P_X définit une mesure de probabilité sur Ω' :

$$\forall E' \subset \Omega', \quad P_X(E') = P\big(X^{-1}(E')\big)$$

  avec $X^{-1}(E') = \big\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E'\big\}$
- L'ensemble des valeurs $P_X\big(\{\omega'\}\big)$ pour $\omega' \in \Omega'$ s'appelle la *loi de probabilité* de X.

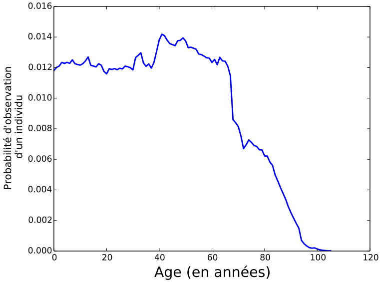
Notations

- L'événement $X \in]-\infty, a]$ sera noté par $X \leq a$
- L'événement $X \in]a, b]$ sera noté par $a < X \leq b$
- L'événement $X \in \{a\}$ sera noté par $X = a$
- On a donc $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$

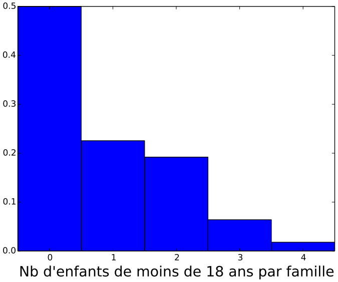
Décrire parfaitement une population = connaitre sa loi de probabilité

Exemples selon la nature des variables :

en continu :



en discret :



Description d'une population

Décrire parfaitement une population = connaitre sa loi de probabilité

Problème général :

Comment déduire la loi sur la population si on ne connait qu'un échantillon ?
Réponse dans les cours suivants...

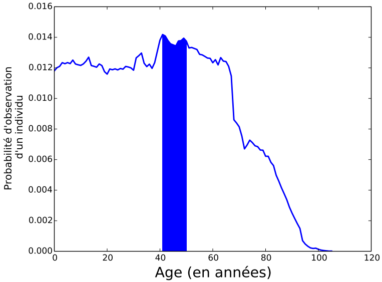
Cas général :

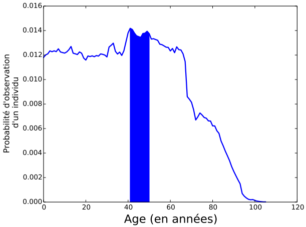
- Une distribution somme à 1
- Une probabilité est toujours ≥ 0

Cas Continu :

- Chaque événement élémentaire a une proba = 0
  (eg : proba d'avoir 40 ans)
- Mais proba d'être dans un intervalle ≥ 0
  (eg : proba d'avoir entre 40 et 50 ans)

$P(A)$ = surface délimitée par la **fonction de densité** dans la zone où les événements sont inclus dans A





$$P(X \in I) = \int_I p(x)dx$$

avec P = proba et p = fonction de densité

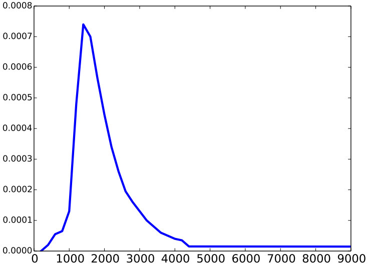
$\Longrightarrow$ connaître p = connaître P

intervalles $]-\infty, x[\Longrightarrow$ fonction de répartition :

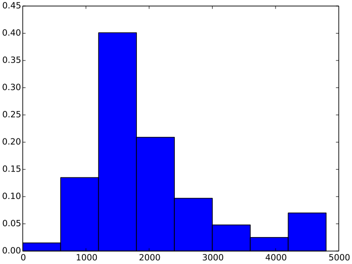
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

Continu $\rightarrow$ Discret

Possibilité de discrétisation = regroupement par tranches
Modélisation approximative, mais manipulation plus facile



Distribution des salaires en France



Distribution des salaires en France **discrétisée**

Caractéristiques d'une loi de probabilités (1/2)

Caractéristiques

- Espérance mathématique ou moyenne : $E(X)$

  X discrète : $E(X) = \sum x_k p_k$

  X continue : $E(X) = \int x\, p(x) dx$

⚠ l'espérance mathématique n'existe pas toujours

- Mode : Mo de P (pas toujours unique) :

  X discrète : $p(Mo) = \max_k p(x_k)$

  X continue : $p(Mo) = \max_x p(x)$

Propriétés de l'espérance

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $\forall X, Y,\ E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Caractéristiques d'une loi de probabilités (2/2)

- variance : $V(X)$ ou σ^2 :

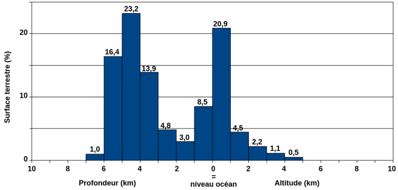
  X discrète : $\sigma^2 = \sum [x_k - E(X)]^2 p_k$

  X continue : $\sigma^2 = \displaystyle\int [x - E(X)]^2\, p(x)dx$
- moyenne des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et son espérance $E(X)$
- écart-type : σ = racine carrée de la variance
- variance et donc écart-type n'existent pas toujours
- **Prop :** $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
  $V(Y) = a^2 V(X)$
- **Prop :** $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

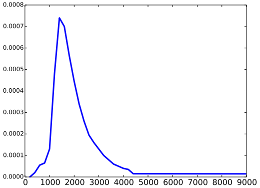
Idées :

1. Caractériser rapidement une distribution
2. Donner en quelques chiffres une idée approchée de l'ensemble de la distribution de probabilité.

- Espérance, variance + moments statistiques



Niveau du sol sur la planète



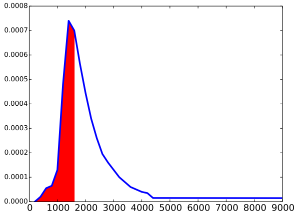
Médiane = 1650, Moyenne = 1950

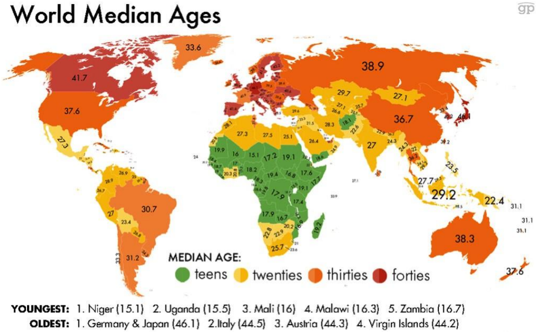
- Quantiles (médianes, ...)

Médiane d'une variable statistique continue

- X : variable statistique continue
- Médiane $=$ le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales

Médiane M : $P(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$





Les quantiles

Quantile d'une variable discrète

- X : variable statistique discrète, modalités $\{x_1, \dots, x_I\}$
- population de N individus
- quantile d'ordre α $=$ tout nombre δ tel que :

$$\sum_{i \in \{j : x_j < \delta\}} N_i \leq \alpha N \quad \textit{et} \quad \sum_{i \in \{j : x_j > \delta\}} N_i \leq (1 - \alpha) N$$

Quantile d'une variable continue

- X : variable statistique continue
- quantile d'ordre α $=$ le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales respectivement à $\alpha \times$ aire totale et $(1 - \alpha) \times$ aire totale

- Chaque individu de la population est décrit sur plusieurs caractères
  Exemples :
  - Carte à jouer : Couleur (Trefle, Carreau, Coeur, Pique), Valeur (7, ..., Roi)
  - Sportifs : Age ($<$ 20, ..., $>$ 50), Sport pratiqué (Natation...)

Loi jointe $P(A, B)$: décrire toutes les intersections possibles
Exemple :

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[$,	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.02	0.05	0.09	0.08	0.08
Jogging	0.10	0.15	0.10	0.07	0.05
Tennis	0.02	0.03	0.06	0.07	0.03

NB : l'ensemble de l'univers Ω somme toujours à 1

Loi marginale

Définition

La marginalisation consiste à projeter une loi jointe sur l'une des variables aléatoires.
Par exemple, extraire $P(A)$ à partir de $P(A, B)$.

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i)$$

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50	Marginale
Natation	0.02	0.05	0.09	0.08	0.08	0.32
Jogging	0.10	0.15	0.10	0.07	0.05	0.47
Tennis	0.02	0.03	0.06	0.07	0.03	0.21
						1

La marginale extraite ici correspond à $P(Sport)$. La nouvelle loi somme toujours à 1.

Loi marginale

Définition

La marginalisation consiste à projeter une loi jointe sur l'une des variables aléatoires.
Par exemple, extraire $P(A)$ à partir de $P(A, B)$.

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i)$$

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.02	0.05	0.09	0.08	0.08
Jogging	0.10	0.15	0.10	0.07	0.05
Tennis	0.02	0.03	0.06	0.07	0.03
Marginale	0.14	0.23	0.25	0.22	0.16

Probabilités conditionnelles (1/5)

Définition

la probabilité d'un événement A conditionnellement à un événement B, que l'on note $P(A|B)$, est la probabilité que A se produise sachant que B s'est ou va se produire.

Rem : $P(A|\Omega) = P(A)$ puisqu'on sait que Ω sera réalisé

Problème : comment calculer $P(A|B)$?

Probabilités conditionnelles (2/5)

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\qquad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

Probabilités conditionnelles (2/5)

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\qquad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

- $\Omega' = B =$ *coeur* (8 cartes)
- $P(A|B) =$ un roi parmi les coeur...

Probabilités conditionnelles (2/5)

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

- $\Omega' = B = \textit{coeur}$ (8 cartes)
- $P(A|B) =$ un roi parmi les coeur...

$P(A|B) = \frac{1}{8}$

Probabilités conditionnelles (3/5)

Théorème des probabilités totales :

En partant de la loi jointe

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \text{ ou } P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

Interprétation : l'observation conjointe de A et B ($P(A,B)$) correspond à l'observation de B ET à l'observation de A dans l'univers restreint B.

Probabilités conditionnelles (3/5)

Théorème des probabilités totales :

En partant de la loi jointe

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \text{ ou } P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

Interprétation : l'observation conjointe de A et B ($P(A,B)$) correspond à l'observation de B ET à l'observation de A dans l'univers restreint B.

Exemple : Roi de coeur = Observer un coeur ET observer un roi dans l'univers des coeurs

Propriétés

- Réversible : $P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
- Théorème de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Intégration des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i) = \sum_i P(A|B = b_i)P(B_i)$$

Probabilités conditionnelles (5/5)

Tableau de probabilité conditionnelle :

- Sport : $P(A)$ =

Natation	0.32
Jogging	0.47
Tennis	0.21

- Répartition des ages pour chaque sport :
  $P(B|A)$ =

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[$,	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.06	0.16	0.28	0.25	0.25
Jogging	0.21	0.32	0.21	0.15	0.11
Tennis	0.10	0.14	0.29	0.33	0.14

- **Propriété :** chaque ligne somme à 1 (=chaque ligne est un univers à part)
- **Questions :** comment extraire la distribution des ages ? Comment obtenir la distribution jointe ?

Propriétés de la variance

- $\forall X, Y,\ V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ où :
  - $cov(X,Y)$ = covariance de X et Y
  - si X et Y discrètes et $p_k = P(X = x_k, Y = y_k)$

$$cov(X,Y) = \sum [x_k - E(X)][y_k - E(Y)]p_k$$

  - si X et Y continues, de densité $p(x,y)$,

$$cov(X,Y) = \int\int [x - E(X)][y - E(Y)]p(x,y)dxdy$$

Indépendance probabiliste (1/3)

Définition de l'indépendance

deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A, B) = P(A) \times P(B)$$

Corrolaire : deux événements A et B sont indépendants si : $P(A|B) = P(A)$ (avec $P(B) > 0$)

l'indépendance n'est pas une propriété du couple (A, B) mais du couple $(\{A, A^c\}, \{B, B^c\})$:

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Longrightarrow A \text{ et } B^c \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B^c \text{ indépendants} \end{aligned}$$

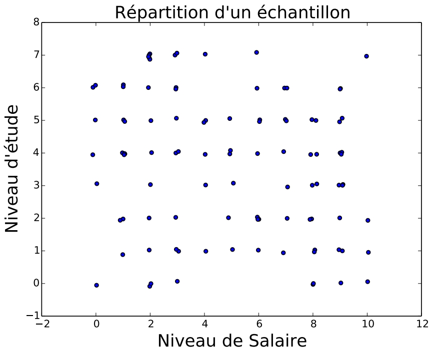
Démonstration :

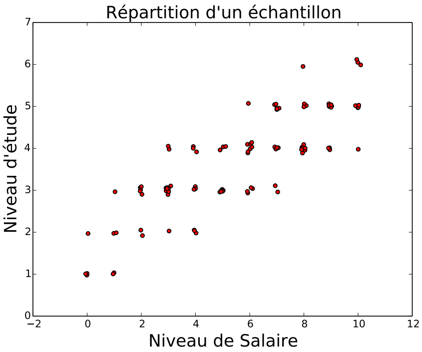
A et B sont indépendants $\Longrightarrow P(A, B) = P(A) \times P(B)$

$P(A) = P(A, B) + P(A, B^c)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow P(A, B^c) &= P(A) - P(A, B) \\
&= P(A) - P(A) \times P(B) \\
&= P(A) \times [1 - P(B)] \\
&= P(A) \times P(B^c)
\end{aligned}$$

Exemple





Qu'est ce qui est dépendant ou indépendant ?

Résumé

Les 4 règles qui vont vous sauver la vie.

- Probabilité :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad 0 \leq P(x) \leq 1 \text{ et } \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$$

- Marginalisation

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2, \dots, x_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$$

- Conditionalisation :

$$P(X_1, X_2) = P(X_1 | X_2) P(X_2) \text{ (et vice versa)}$$

- Indépendance :
  Si X_1 et X_2 sont indépendantes : $P(X_1, X_2) = P(X_1) P(X_2)$

Définition : Coefficient de corrélation linéaire

Soit X, Y deux variables. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

$$r = \frac{\text{cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où σ_X et σ_Y sont les écart-types des variables X et Y.