# MAPSI — cours 2 : Rappels de probabilités et statistiques

Pierre-Henri Wuillemin – **Christophe Gonzales**

LIP6 – Sorbonne université, France

# Plan du cours n°2

1. Indépendance mutuelle
2. Indépendance conditionnelle
3. Loi de Bernoulli / binomiale
4. Loi normale
5. Théorème central-limite
6. Lois des grands nombres

# Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

*Rappel : Indépendance de deux variables discrètes*

$X$ et $Y$ sont *indépendantes* si $\forall x \in X, \forall y \in Y$ :

les événements $X = x$ et $Y = y$ sont indépendants

1. $\forall x, \forall y,\ P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$

   $$P(X, Y) = P(X) \times P(Y)$$

2. $\forall x, \forall y\ t.q.\ P(Y = y) > 0,\ P(X = x | Y = y) = P(X = x)$
3. $\forall y, \forall x\ t.q.\ P(X = x) > 0,\ P(Y = y | X = x) = P(Y = y)$

⚠ 2 et 3 : conditionnement = apport d'information

# Indépendance de deux variables aléatoires continues

*Rappel : Indépendance de deux variables continues*

$X$ et $Y$ sont *indépendantes* si $\forall I, \forall J$, intervalles,

les événements $X \in I$ et $Y \in J$ sont indépendants

Il suffit que les fonctions de répartition, $F_X$, $F_Y$ de $X$ et $Y$ et $F_{XY}$ du couple vérifient :

$$\forall x, y,\ F_{XY}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

ou encore que les densités de probabilité $p_X$, $p_Y$ de $X$ et $Y$ et $p_{XY}$ du couple vérifient :

$$\forall x, y,\ p_{XY}(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

# Généralisation : indépendance mutuelle de $n$ variables

*Définition*

Soient $n$ variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n)$
Elles sont *mutuellement indépendantes* si tout événement lié à une partie d'entre elles est indépendant de tout événement lié à toute autre partie disjointe de la précédente

$\Longrightarrow$ c'est la généralisation naturelle de l'indépendance de deux variables :

Les variables discrètes $(X_1, \dots, X_k, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$\forall x_k, P(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k) = \prod_{k=1}^{n} P(x_k)$$

# Indépendance mutuelle de $n$ variables

## *Définition*

Soient $n$ variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$
Elles sont *mutuellement indépendantes* si tout événement lié à une partie d'entre elles est indépendant de tout événement lié à toute autre partie disjointe de la précédente

Pour des variables continues $(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$p_{X_1 \ldots X_k \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}(x_k)$$

L'indépendance mutuelle de $n$ variables entraîne leur indépendance deux à deux.
la réciproque n'est pas vraie

# Indépendance conditionnelle (1/2)

### *Indépendance conditionnelle de deux variables discrètes*

$X$ et $Y$ sont *indépendantes conditionnellement à* $Z$ si $\forall x, \forall y, \forall z$, les événements $X = x$ et $Y = y$ sont indépendants conditionnellement à $Z = z$

- $P(X{=}x \cap Y{=}y|Z{=}z) = P(X{=}x|Z{=}z) \times P(Y{=}y|Z{=}z)$
- si $P(Y{=}y|Z{=}z) > 0$ alors :
  $P(X{=}x|Y{=}y, Z{=}z) = P(X{=}x|Z{=}z)$
- si $P(X{=}x|Z{=}z) > 0$ alors :
  $P(Y = y|X{=}x, Z{=}z) = P(Y{=}y|Z{=}z)$

# Indépendance conditionnelle (2/2)

### *Indépendance conditionnelle de deux variables discrètes*

$X$ et $Y$ sont *indépendantes* conditionnellement à $Z$ si :

- $P(X \cap Y|Z) = P(X|Z) \times P(Y|Z)$
- si $P(Y|Z) > 0$ alors $P(X|Y,Z) = P(X|Z)$
- si $P(X|Z) > 0$ alors $P(Y|X,Z) = P(Y|Z)$

### *Interprétation*

- Conditionnement = apport de connaissances
- Si l'on connaît la valeur de la variable $Z$, alors connaître celle de $Y$ n'apporte rien sur la connaissance de $X$

⚠ Ces formules s'étendent si $X$, $Y$ et/ou $Z$ sont remplacés par des ensembles de variables aléatoires disjoints 2 à 2

# Dissection du produit de deux probabilités

$$P(A,B|C) = \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{a_1} & \multicolumn{2}{c}{a_2} & \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_2 & \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}18 & 0{,}07 & 0{,}56 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}63 & 0{,}14 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \end{array} = \underbrace{\begin{array}{ccccc} \multicolumn{2}{c}{a_1} & \multicolumn{2}{c}{a_2} & \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_2 & \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \end{array}}_{P(B|A,C)} \text{ x } \underbrace{\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \multicolumn{2}{c}{(0{,}3 \quad 0{,}7)} \end{array}}_{P(A)}$$

$$P(I,C|B) = \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{b_1} & \multicolumn{2}{c}{b_2} & \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_2 & \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}08 & 0{,}48 & 0{,}08 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}12 & 0{,}32 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \end{array} = \overbrace{\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \end{array}}^{P(I|C)} \text{ x } \overbrace{\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \multicolumn{2}{c}{(0{,}6 \quad 0{,}4)} \end{array}}^{P(C)}$$

⚠ probabilités $\Longrightarrow$ produits terme à terme !

# Loi de Bernoulli

### *Définition*

*Épreuve de Bernoulli* = expérience aléatoire qui ne peut prendre que deux résultats (*succès* et *échec*)

$p$ = proba de succès, et $q = 1 - p$ = proba d'échec.

### *Loi de Bernoulli*

Variable $X$ à support $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ telle que :

$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$

$\Longrightarrow X =$ le nombre de succès de l'épreuve de Bernoulli

# Loi binomiale

## *Définition*

*Épreuve binomiale* = expérience aléatoire telle que :

1. on répète $n$ fois la même épreuve de Bernoulli,
2. les probas $p$ et $q$ restent inchangées pour chaque épreuve de Bernoulli,
3. les épreuves de Bernoulli sont toutes réalisées indépendamment les unes des autres.

## *Loi binomiale de paramètres n et p*

- $X$ = nombre de succès de l'épreuve binomiale
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
- $P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}, \forall k = 0, \ldots, n$
- $E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$

# Loi normale

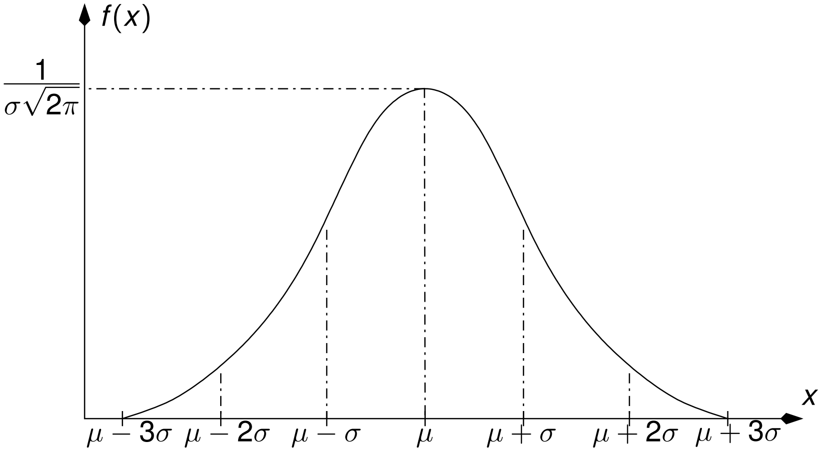
⚠ Loi extrêmement importante : souvent une très bonne approximation de la loi réelle

*Définition : loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma^2$*

- notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- s'applique pour des variables aléatoires continues
- densité positive sur tout $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

- $E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2$


$f(x)$
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
$x$
$\mu - 3\sigma$
$\mu - 2\sigma$
$\mu - \sigma$
$\mu$
$\mu + \sigma$
$\mu + 2\sigma$
$\mu + 3\sigma$

# Loi normale en pratique

*Théorème*

$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Alors la variable $Y = aX + b$ obéit à la loi $\mathcal{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$.

$\Longrightarrow$ toute transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit aussi une loi normale

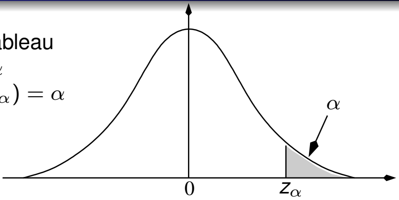
*Corollaire*

- $X$ une variable aléatoire obéissant à une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

  $\Longrightarrow Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- $Z$ suit une loi normale centrée (à cause de la moyenne en 0) réduite (à cause du $\sigma^2$ égal à 1)

# Table de la loi normale centrée réduite

valeurs dans le tableau
ci-dessous : les $\alpha$
tels que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$




| $z_\alpha$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| 0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| 0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| 0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| 0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| 0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| 0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2297 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| 0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| 0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| 1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| 1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| 1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| 1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0859 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| 1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0722 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| 1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| 1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0466 | 0,0455 |
| 1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| 1,8 | 0,0359 | 0,0352 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| 1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |

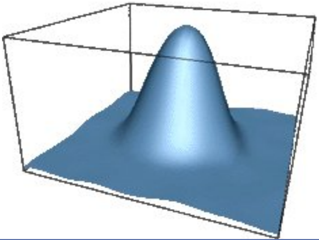
# Loi normale bi-dimensionnelle

*Définition : loi normale bi-dimensionnelle*

- couple de variables $(X, Y)$
- densité dans $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

où $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ = *coefficient de corrélation linéaire*



# Théorème central-limite

*Théorème central-limite*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : suite de variables
  - de même loi
  - d'espérance $\mu$
  - de variance $\sigma^2$
  - mutuellement indépendantes
- alors la suite des moyennes empiriques centrées réduites $\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma\,/\,\sqrt{n}}$ tend en loi vers la loi normale centrée réduite :

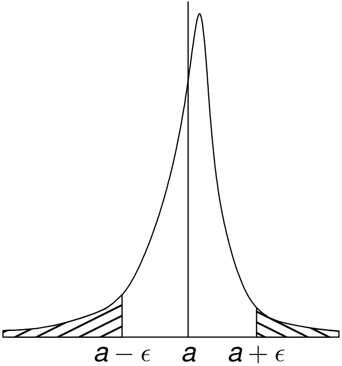
$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma\,/\,\sqrt{n}} \overset{loi}{\rightarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

# Convergence en probabilité

### *Définition*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : suite de variables
- $a$ : constante
- $(X_n)$ *converge en probabilité* vers $a$ si, pour tout $\epsilon > 0$ la probabilité que l'écart absolu entre $X_n$ et $a$ dépasse $\epsilon$ tend vers 0 quand $n \to \infty$ :

$$\lim_{n\to\infty} P(|\, X_n - a\,| \geq \epsilon) = 0$$




Aire hachurée tend vers 0 quand $n \to \infty$

# Loi faible des grands nombres

### *Loi faible*

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires :
  - de même loi
  - d'espérance $m$
  - possédant une variance $\sigma^2$
  - deux à deux indépendantes
- alors la suite des variables $\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ converge en probabilité vers $m$

$\overline{X}_n$ est appelée *moyenne empirique*

$$E(\overline{X}_n) = m$$

$$V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

*conséquence :* échantillons de grandes tailles $\Longrightarrow$ bonne chance d'estimer $m$

# Convergence presque sûre

### *Définition*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : suite de variables
- $a$ : constante
- $(X_n)$ *converge presque sûrement* vers $a$ s'il y a une proba 1 que la suite des réalisations des $X_n$ tende vers $a$ :

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = a\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |X_k - a| \geq \epsilon\right) = 0$$

⚠ Définition plus exigeante que la convergence en probabilité

# Loi forte des grands nombres

*Loi forte*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : suite de variables aléatoires
  - de même loi
  - d'espérance $m$
  - possédant une variance $\sigma^2$
  - mutuellement indépendantes
- alors la suite des variables $\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ converge presque sûrement vers $m$

Interprétation : échantillon de grande taille
$\Longrightarrow$ bonne estimation de $m$

# Convergence en loi

*Définition*

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : suite de variables
- $F_n$ : fonction de répartition de $X_n$
- $X$ : variable de fonction de répartition $F$
- La suite $X_n$ *converge en loi* vers $X$ lorsque $F_n(x)$ tend vers $F(x)$ en tout point de continuité de $F$

*Notation :* $X_n \stackrel{loi}{\to} X$