(1)

$$p(d|\theta) = \prod_{i \in d} p(w_i|\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{D} \theta_i^{x_i}$$ ← nb occurences mot i

$$\log p = \sum_{i=1}^{D} x_i \log \theta_i$$ ← écriture $p(w_i|\theta) \Rightarrow \theta_i$ (multinomiale)

$$p(\theta) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod \theta_i^{\alpha_i - 1}$$

$B(\alpha)$ ← ne dépend pas de θ (intégrale)

$$\mathcal{M} = \log p(d|\theta)\, p(\theta) = \left(\sum_i x_i \log \theta_i\right) - \log B(\alpha) + \sum_i (\alpha_i - 1) \log \theta_i$$

$$\cancel{\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta_i} = \frac{x_i}{\theta_i} + \frac{\alpha_i - 1}{\theta_i} = 0}$$

<u>prise en compte de contraintes</u> (Lagrangien) : $\boxed{\sum_i \theta_i = 1}$

↳ effectivement, je ne sais pas trop par où ils sont passés dans la correction ...

$$\mathcal{M}^* = \sum_i x_i \log \theta_i - \log B(\alpha) + \sum_i (\alpha_i - 1) \log \theta_i + \lambda \left(\sum_i \theta_i - 1\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\theta_i} x_i + (\alpha_i - 1) \frac{1}{\theta_i} + \lambda = 0$$

$$\boxed{\theta_i = \frac{1 - \alpha_i - x_i}{\lambda}}$$

$$\mathcal{J}^* = \sum_i x_i \Big(\log(1-\alpha_i - x_i) - \log(\lambda)\Big) - \log B(\alpha)$$
$$+ \sum_i (\alpha_i - 1)\Big(\log(1-\alpha_i - x_i) - \log(\lambda)\Big)$$
$$+ \lambda\left(\sum_i \frac{1-\alpha_i - x_i}{\lambda} - 1\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda}\left(\sum_i x_i + \sum_i (\alpha_i - 1)\right) - 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda = -\left(\sum_i x_i + \sum_i (\alpha_i - 1)\right)}$$

$$\theta_i = \frac{x_i + \alpha_i - 1}{\underbrace{\sum_i x_i}_{N_d} + \sum_i (\alpha_i - 1)}$$

je pense qu'il manque une parenthèse dans la correction en ligne