MAPSI – Examen final – 30pts

Durée : 2 heures

Seuls documents autorisés : Calculatrice, antisèche recto-verso, tables de lois.
– Barème indicatif –

Exercice 1 – Betterave Bio... ou pas (7pts)

Une coopérative de betterave regroupant 100 parcelles fait une expérimentation sur la culture biologique. 10 parcelles sont cultivées en Bio, sans pesticide ni engrais chimique tandis que les autres parcelles restent en agriculture traditionnelle.

	Bio	**Traditionnelle**
Haut rendement (en moyenne 1.5T / parcelle)	6	80
Bas rendement (en moyenne 1T / parcelle)	4	10

TABLE 1 – Tableau de répartition des 100 parcelles selon leur mode de culture et leur rendement.

Q 1.1 (1pt) Quelles sont les deux variables aléatoires étudiées et leurs modalités ? Y a-t-il plus de chance d'avoir des haut rendements en agriculture biologique ou traditionnelle ? Indiquer les probabilités que vous comparez.

Rendement R (modalité HR et BR)
Culture C (modalité Bio et $\bar{Bio}$)
$p(R = HR|C = Bio) = \frac{6}{10} < p(R = HR|C = \bar{Bio}) = \frac{8}{9} = 88.8\%$

Q 1.2 (1.5pt) Nous prendrons un prix de vente de 1 pour une 1 tonne de Betterave issue de l'agriculture traditionnelle. Le prix de vente de la betterave bio est 25% supérieur à celui de la betterave traditionnelle. En l'état actuel de l'expérimentation et en assimilant le gain au chiffre d'affaire, est-il plus rentable de cultiver de la betterave bio ou traditionnelle sur une parcelle ? Indiquer clairement les étapes de votre raisonnement.

Il faut étudier la variable G : Gain par parcelle
On pose arbitrairement un gain de 1 pour une tonne de betterave traditionnelle (et donc de 1.25 pour de la betterave bio). Il faut comparer l'espérance de gain conditionnellement au mode de culture :

	Bio HR	Bio BR	Tradi HR	Tradi BR
G	1.8375	1.25	1.5	1

$$E[G|C = bio] = p(HR|Bio) * 1.8375 + p(BR|Bio) * 1.25 = \frac{6}{10} * 1.8375 + \frac{4}{10} * 1.25 = 1.625$$

$$E[G|C = \bar{bio}] = \frac{8}{9} * 1.5 + \frac{1}{9} * 1 = 1.44$$

Le gain est supérieur pour la betterave biologique
Barème : 1pt pour le résultat numérique, 0.5pt pour l'espérance et les probas conditionnelles

Q 1.3 (2pt) Peut-on affirmer que le rendement d'une parcelle est lié [1] à son mode de culture avec une confiance de 90% ? Le résultat reste-t-il le même à un niveau de confiance de 99% ?

Il faut faire un test du chi2 en prenant H0 : les variables sont indépendantes.
marginale : $C = [0.10.9]$, $R = [0.86, 0.14]$
Tableau théorique :

1. Lié = non indépendant

	Bio	**Traditionnelle**
Haut rendement (en moyenne 1.5T / parcelle)	8.6	77.4
Bas rendement (en moyenne 1T / parcelle)	1.4	12.6

$A = 6.238$
DDL = 1
à 90% de confiance, alpha = 0.1, Limite = 2.71, on rejette l'hypothèse d'indépendance (et on affirme que les variables sont liées).
à 99% de confiance, alpha = 0.01, Limite = 6.63, on ne peut plus rejeter l'hypothèse d'indépendance... On n'affirmera donc plus que les variables sont liées.

Q 1.4 (0.5pt) Calculer l'espérance du rendement, tous types de parcelles confondus (en T/parcelle). Donner la formule littérale du calcul puis l'application numérique.

$$E[R] = 1.5 * p(R = HR) + 1 * p(R = BR) = 1.5 * 0.86 + 0.14 = 1.43$$

Q 1.5 (2pts) Au café du coin, chiffres à l'appui, les anciens affirment que les parcelles donnaient 1.5T en moyenne, avec un écart type $\sigma = 0.2$ T/parcelle. En prenant nos 100 parcelles comme un échantillon iid, peut-on affirmer que le rendement a baissé cette année avec une confiance de 95% ?

H0 = les rendements sont stables
H1 = ils ont baissé

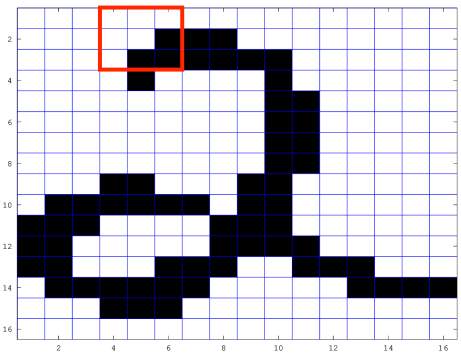
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$p\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\right) = \alpha \iff p\left(\bar{X} < -z_\alpha \sigma/\sqrt{n} + \mu\right) = \alpha$$

$$p\left(\bar{X} < 1.4671\right) = 0.05$$

⇒ Si on donne du crédit aux chiffres des anciens, les rendements ont effectivement baissé (rejet de H0)

Exercice 2 – Reconnaissance de chiffres dans un cadre bruité (8pts)



Notations : $\mathbf{x}$ est une image binaire composée de 16x16 pixels. On note $X = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N\}$ un ensemble de N images de chiffres manuscrits, où chaque image est décrite par : $\mathbf{x}^i = \{x_1^i, \ldots, x_{256}^i\}, x_j \in \{0, 1\}$. On dispose des étiquettes y^i associées à toutes ces images (les dix chiffres sont présents dans la base).

Ces images étant particulièrement bruitées, on décide de travailler par fenêtre de 3x3 pixels glissant sur l'image. Pour chaque fenêtre, on compte le nombre de pixels noirs (3 dans l'exemple ci-contre). Notre image se trouve donc maintenant représentée par des descripteurs $f_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Chaque image est constituée de 14x14=196 descripteurs f_j.

Q 2.1 (1pt) Modélisation d'un descripteur. On étudie une observation f_j donnant le nombre de pixels noirs dans la fenêtre à une position j. Quelle loi classique permet de modéliser la variable aléatoire F_j dont cette observation est tirée ? Donner l'expression de $p(F_j = f_j)$.

Binomiale $\mathcal{B}(9, p_j)$

$$p(F_j = f_j) = C_9^{f_j} p_j^{f_j} (1 - p_j)^{9 - f_j}$$

Q 2.2 (1pt) Quels vont être les paramètres à apprendre dans ce problème ? Combien y aura-t-il de paramètres à apprendre au total pour faire marcher un classifieur de chiffres ?

Il va falloir apprendre les p_j
Il y en a 196 pour chacune des 10 classes, soit 1960 paramètres à apprendre.

Q 2.3 (1.5pt) Modélisation. On fait l'hypothèse simplificatrice que chaque variable descriptive F_j est indépendante des autres. Donner la vraisemblance d'une image puis la vraisemblance de X. Indiquer brièvement ce que vous pensez de l'hypothèse d'indépendance des F_j.
Notation : le descripteur j de l'image i sera noté f_j^i

$$\log \mathcal{L} = \sum_{i,j} \log(C_9^{f_j}) + f_j^i \log(p_j) + (9 - f_j^i) \log(1 - p_j)$$

Nous avons l'habitude des hypothèses naïves... Mais c'est encore pire que d'habitude : les fenêtres se recouvrent et reposent donc en partie sur les mêmes infos que leur voisines... On est très loin de l'indépendance.

Q 2.4 (2.5pts) Donner l'expression des paramètres optimaux et la démonstration du calcul.

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial p_j} = \sum_i f_j^i \frac{1}{p_j} + (9 - f_j^i) \frac{-1}{1 - p_j} = 0$$

$$\iff \sum_i f_j^i (1 - p_j) - p_j (9 - f_j^i) = 0$$

$$\iff \sum_i f_j^i = p_j \sum_i (f_j^i + 9 - f_j^i)$$

$$\iff p_j^\star = \frac{\sum_i f_j^i}{9N}$$

Q 2.5 (1pt) Comment faire pour exploiter ces paramètres optimaux pour classer une nouvelle image $\mathbf{x}$? Indiquer la procédure détaillée et les calculs à effectuer.

Pour chaque image $\mathbf{x}$, il faut :
- construire les f
- pour toutes les classes c, calculer $p(\mathbf{x}|c)$
- calculer $y_{pred} = \text{argmax}_c\, p(\mathbf{x}|c)$

$$p(\mathbf{x}|c) = \sum_j \log(C_9^{f_j}) + f_j^i \log(p^\star_{j,c}) + (9 - f_j^i)\log(1 - p^\star_{j,c})$$

Q 2.6 (1pt) Les fournisseurs de ces bases nous indiquent que les classes de données ne sont pas équiprobables : ils nous donnent 10 paramètres $\pi_0, \ldots, \pi_9$ donnant la fréquence de chaque chiffre dans la base... Cette information change-t-elle la définition du classifieur optimal ? Dans l'affirmative, réviser la procédure en conséquence –en indiquant toujours le détail des calculs à effectuer–.

Classe par classe, l'optimisation des paramètres ne change pas.
Mais avec ces informations a priori, il faut maintenant utiliser une procédure de classification au sens du max a posteriori :
$y_{pred} = \text{argmax}_c\, p(c|\mathbf{x})$ avec $p(c|\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|c)\pi_c / p(\mathbf{x})$
d'où $y_{pred} = \text{argmax}_c\, p(\mathbf{x}|c)\pi_c$

Exercice 3 – Prédiction de consommation d'électricité (6pts)

Prédire la consommation électrique est critique pour ajuster au mieux la production et éviter les pertes. Nous disposons d'une base de données de la consommation des 100 jours précédents avec un relevé toutes les heures : $E = \{e_1, \ldots, e_{2400}\}$.
Nous choisissons un modèle auto-régressif, qui prédit la consommation à l'instant t en fonction des consommations observées sur les p pas de temps précédents (+ un résidu noté ε) :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \qquad \text{Dans ce problème, on prendra donc : } \hat{e}_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i e_{t-i}$$

Q 3.1 (2.5pts) Nous voulons optimiser la prédiction de consommation au sens des moindres carrés. Formaliser cette fonction coût, la dériver par rapport à φ_i et montrer que cette dérivée est de la forme : $\frac{\partial C}{\partial \varphi_i} = \sum_j (\varphi_j \alpha_{i,j}) - \beta_i$. Identifier les coefficients α et β.

Notons $\hat{e}_t$ une sortie de l'estimateur.

$$C = \sum_t (\hat{e}_t - e_t)^2$$

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi_i} = \sum_t 2e_{t-i}\left(\sum_j \varphi_j e_{t-j} - e_t\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi_i} = \sum_{t,j} (2\varphi_j e_{t-i} e_{t-j}) - \sum_t (2e_{t-i}e_t)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi_i} = \sum_j (2\varphi_j \sum_t e_{t-i} e_{t-j}) - \sum_t (2e_{t-i}e_t)$$

Q 3.2 (1.5pt) Montrer que l'optimisation de ce problème correspond à la résolution d'un système d'équations linéaires. Formuler ce problème sous forme matricielle en détaillant les dimensions des matrices et les coefficients en jeu. Vous pourrez simplifier les écritures en introduisant les variables $\gamma_{ij} = \sum_t e_{t-i}e_{t-j}$.

Q 3.3 (1pt) En remarquant que la même translation sur i et j ne change pas la valeur de γ_{ij} (ie $\gamma_{i,j} = \gamma_{i-2,j-2}$), il est possible de simplifier la notation indicielle en introduisant des $\gamma_k, k = i - j$. En remarquant aussi que $\gamma_k = \gamma_{-k}$, combien de termes uniques faut-il calculer pour poser le système d'équations linéaires ?

L'optimisation de la fonction nécessite que $\frac{\partial C}{\partial \varphi_i} = 0, \forall i$
cela peut se poser sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1,0} \\ \gamma_{2,0} \\ \gamma_{3,0} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} & \cdots \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \gamma_{2,3} & \cdots \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & \gamma_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

avec

$$\gamma_{ij} = \sum_t e_{t-i}e_{t-j}$$

On remarque rapidement que seul l'écart entre i et j a besoin d'être indicé...

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_{-1} & \gamma_{-2} & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} & \cdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

La matrice fait $p \times p$ coefficients
Mais seuls p coefficients sont uniques (les coefs de la premières lignes doivent être calculés, les autres lignes sont des permutations de la première)

Q 3.4 (1pt) Au terme d'une campagne d'expériences portant sur la détermination du paramètre p, nous avons montré que plus p est grand, plus l'erreur de prédiction sur E est petite... Ce phénomène vous semble-t-il logique ? Quelle erreur avons-nous faite ? Proposer un protocole expérimental corrige ce défaut.

C'est du sur-apprentissage... Il faut séparer un ensemble d'apprentissage et de test dans la procédure. Eventuellement faire de la validation croisée

Exercice 4 – Recommandation. (*Bayesian Personalized Ranking*) (9pts)

Nous allons construire un système de recommandation basé sur l'algorithme *Bayesian Personalized Ranking*[2]. C'est une stratégie assez proche de l'approche Netflix dans laquelle nous devons être capable de prédire si un utilisateur va aimer un film ou pas en fonction de ce qu'il a aimé dans le passé (et de ce que les autres utilisateurs ont aimé dans le passé).
Dans un tel système, chaque utilisateur u est modélisé par un vecteur $\mathbf{z}_u \in \mathbb{R}^K$ et chaque film (ou item) par un vecteur $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^K$. K donne la dimension des vecteurs (typiquement entre 50 et 300). Les auteurs de l'article original proposent d'utiliser la fonction logistique pour estimer l'affinité entre un utilisateur $\mathbf{z}_u$ et un item $\mathbf{z}_i$. Ainsi, en notant $A_{ui} \in \{0,1\}$ la variable binaire modélisant l'affinité, nous obtenons :

$$P(A_{ui}=1|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i) = \frac{1}{1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)}, \qquad \mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i = \sum_{k=1}^{K} z_{u,k}z_{i,k}, \text{ produit scalaire classique} \tag{1}$$

Le client (par exemple Netflix) vous fournit une matrice $A \in \{0,1\}^{N_u\times N_i}$ où chaque utilisateur est décrit sur une ligne et chaque item sur une colonne. Chaque case contient un 1 si l'item a été apprécié par l'utilisateur et 0 sinon (pas vu ou pas aimé). Dans la suite, nous notons a_{ui} les valeurs observées dans A (à la ligne u et la colonne i).

Q 4.1 (0.5pt) Quelle loi peut servir à modéliser A_{ui} ?

A_{ui} suit une loi de Bernoulli

Q 4.2 (1pt) Exprimer la vraisemblance de $P(A_{ui}=a_{ui}|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i)$ en fonction de $P(A_{ui}=1|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i)$ et a_{ui}. Vous utiliserez le *truc* classique permettant de prendre en compte les cas $a_{ui}=0$ et $a_{ui}=1$ dans la même expression.

$$P(A_{ui}=a_{ui}|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i) = P(A_{ui}=1|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i)^{a_{ui}}(1-P(A_{ui}=1|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i))^{1-a_{ui}}$$

Q 4.3 (2.5pt) Exprimer la log-vraisemblance de l'ensemble des valeurs observées dans la matrice en faisant l'hypothèse qu'elles sont toutes indépendantes.
Montrer que le résultat peut s'écrire sous la forme : $\log\mathcal{L} = \sum_{u,i}\alpha\log(1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)) + \beta_{u,i}(\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)$ en identifiant α et β.

$$\mathcal{L} = \prod_{u,i} P(A_{ui}=a_{ui}|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i)$$

$$\log\mathcal{L} = \sum_{u,i} a_{ui}\log P(A_{ui}=1|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i) + (1-a_{ui})\log(1-P(A_{ui}=1|\mathbf{z}_u,\mathbf{z}_i))$$

$$\log\mathcal{L} = \sum_{u,i} a_{ui}\log\frac{1}{1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)} + (1-a_{ui})\log(\frac{\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)}{1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)})$$

$$\log\mathcal{L} = \sum_{u,i} a_{ui}(-\log(1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i))) + (1-a_{ui})(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i - \log(1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)))$$

$$\log\mathcal{L} = \sum_{u,i} \log(1+\exp(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i))(-1) + (1-a_{ui})(-\mathbf{z}_u\cdot\mathbf{z}_i)$$

Q 4.4 (1pt) Rappeler quels sont les paramètres à optimiser et leur nombre.

2. BPR : Bayesian Personalized Ranking from Implicit Feedback, *S. Rendle, C. Freudenthaler, Z. Gantner and L. Schmidt-Thieme*

Tous les vecteurs $\mathbf{z}_u, \mathbf{z}_i$. Il y a donc $K \times N_u + K \times N_i$ paramètres

Q 4.5 (2pts) Calculer le gradient de la log-vraisemblance par rapport au paramètre $z_{u,k}$, correspondant à la $k$ième composante du vecteur représentant un individu $\mathbf{z}_u$.

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial z_{u,k}} = \sum_i \frac{z_{i,k} \exp(-\mathbf{z}_u \cdot \mathbf{z}_i)}{1 + \exp(-\mathbf{z}_u \cdot \mathbf{z}_i)} + (1 - a_{ui})(-z_{i,k})$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial z_{u,k}} = \sum_i z_{i,k}(1 - \frac{1}{1 + \exp(-\mathbf{z}_u \cdot \mathbf{z}_i)} - 1 + a_{ui})$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial z_{u,k}} = \sum_i z_{i,k}(a_{ui} - \frac{1}{1 + \exp(-\mathbf{z}_u \cdot \mathbf{z}_i)})$$

Q 4.6 (1pt) Rappeler comment exploiter ce gradient pour maximiser la vraisemblance. Comment procéder pour optimiser tous les paramètres du systèmes ?

On fait une montée de gradient :

$$z_{u,k} \leftarrow z_{u,k} + \varepsilon \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial z_{u,k}}$$

Il faut alterner les optimisations sur les $z_{u,k}$ et sur les $z_{i,k}$ jusqu'à convergence.

Q 4.7 (0.5pt) Comment évaluer ce système avec une fiabilité satisfaisante ?

En cachant une partie des 1 et en cherchant à les prédire

Q 4.8 (0.5pt) Pour un client de la base initiale (dont on connait un certain nombre de préférences), comment exploiter ce système en inférence dans un système opérationnel ?

Pour un client $\mathbf{z}_u$, on calcule toutes les prédictions sur tous les films et on présente les k qui risquent de lui plaire le plus

Q 4.9 (Bonus) Si la dimension K de l'espace de représentation des utilisateurs et des items est faible, à votre avis, serait-il envisageable de faire émerger une signification associée à l'une des dimension k ? Pourquoi ?

Il s'agit d'une problématique de compression de l'information. Si K est faible, nous avons peu d'information pour représenter un film... Une dimension doit correspondre à un aspect que beaucoup d'utilisateur aiment dans ce film et dans d'autres qui partagent le même aspect : il est souvent possible de trouver une sémantique associée à certains axes d'analyse (films d'actions, romances...)