Examen **A**nalyse **M**ulti-résolution et **O**ndelettes

24 janvier 2013

Durée de l'examen : 2h. **Portables éteints et rangés.**
Documents autorisés : polycopiés de cours (éventuellement annotés).
Les deux parties sont indépendantes et à rendre sur des copies séparées.
Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif, et est susceptible d'être modifié.

1$^{\text{ère}}$ Partie : Représentation des signaux et des images (20 points)

Exercice 1 Résolution temporelle et fréquentielle (15 points)

Soit une fonction $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et $X(f) = TF[x(t)]$ sa transformée de Fourier. L'énergie E du signal $x(t)$ s'écrit :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \tag{1}$$

On peut alors considérer $\frac{|x(t)|^2}{E}$ (resp. $\frac{|X(f)|^2}{E}$) comme la densité de probabilité d'une variable continue qu'on notera X_t (resp. X_f). X_t et X_f sont alors caractérisées de manière classique par les moments d'ordre k dont les deux premières valeurs s'écrivent :

— Moment d'ordre 1 : espérance mathématique qui représente le centre temporel $< t >$ (resp. fréquentiel $< f >$) de X_t (resp. X_f) :

$$< t >= \mathbb{E}\left[X_t\right] = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2 dt \qquad < f >= \mathbb{E}\left[X_f\right] = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} f|X(f)|^2 df$$

— Moment d'ordre 2 : écart-type qui représente la dispersion Δ_t (resp. Δ_f) de X_t (resp. X_f) par rapport au centre temporel $< t >$ (resp. fréquentiel $< f >$) :

$$\Delta_t = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} (t - < t >)^2 |x(t)|^2 dt} \tag{2}$$

$$\Delta_f = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X_f - \mathbb{E}[X_f])^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} (f - < f >)^2 |X(f)|^2 df} \tag{3}$$

Questions préliminaires

1. Quel est l'interprétation en terme de localisation temporelle (resp. fréquentielle) de Δ_t (resp. Δ_f) ? Rappeler le principe fondamental qui lie localisation temporelle et fréquentielle.
2. Sans faire aucun calcul, mais en le justifiant brièvement, préciser les valeurs de Δ_t et Δ_f attendues pour les deux signaux suivants : (a) $x(t) = \delta(t - t_0)$, (b) $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$. Quels archétypes de signaux représentent les fonctions (a) et (b) ?

On va maintenant calculer Δ_t et Δ_f pour des signaux classiques. Dans tout ce qui suit on admettra que $< t >= 0$ et $< f >= 0$ pour les signaux étudiés.

Fonction Triangle Soit la fonction $tri(t)$ suivante :

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

La transformée de Fourier de $tri(t)$ s'écrit : $TF[tri(t)] = Tri(f) = sinc(\pi f)^2 = \left[\frac{sin(\pi f)}{\pi f}\right]^2$.

1. Représenter graphiquement $tri(t)$.
2. Calculer E pour $tri(t)$ à partir de l'éqution 1.
3. Déterminer Δ_t pour $tri(t)$ en calculant l'intégrale définie à l'équation 2.
4. Déterminer Δ_f pour $tri(f)$ en calculant l'intégrale définie à l'équation 3.
   Indication : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(\pi f)^4}{f^2} df = \frac{\pi^2}{2}$.
5. Calculer le produit $\Delta_t \cdot \Delta_f$. Que représente-t-il et quelle est son interprétation ?

Fonction Gaussienne Soit la fonction $g(t)$ correspondant à la densité d'une variable aléatoire G gaussienne centrée d'écart-type σ :

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

On rappelle que, pour une telle variable G, on a $\mathbb{E}[G] = 0$ (variable centrée) et $\mathbb{E}[G^2] = \sigma^2$.

1. Calculer E pour $g(t)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ (intégrale de Gauss).
2. Calculer Δ_t pour $g(t)$.
   Indication : exprimer l'intégrale comme le moment d'ordre 2 d'une densité Gaussienne.
3. Déterminer la transformée de Fourier $G(f) = TF[g(t)]$. Quelle est la forme de la TF ?
4. Calculer Δ_f pour $G(f)$.
5. Interpréter Δ_t et Δ_f en fonction de σ. Que vaut le produit $\Delta_t \cdot \Delta_f$? Comparer à la fonction triangle et conclure sur le compromis localisation temps-fréquence.

Exercice 2 Compressive Sensing et échantillonnage (5 points)

Le théorème de Nyquist-Shanon précise la borne inférieure de la fréquence d'échantillonnage afin de ne pas perdre d'information lors de l'échantillonnage d'un signal analogique. Si ce dernier est à bande limitée, de fréquence f_{max}, alors la fréquenc d'échantillonnage f_e doit vérifier $f_e \geq 2f_{max}$. Si cette condition est satisfaite, on peut reconstruire parfaitement le signal analogique à partir du signal numérique. Sous certaines conditions portant sur la nature des signaux étudiées, il est possible avec les techniques de compressive sensing de descendre en dessous de la limite théorique définie par le théorème de Shannon tout en reconstruisant parfaitement le signal.

On considère une fonction continue 2d $x(t, u)$ qu'on a échantillonée conformément au théorème de Shannon pour produire un signal discret 2d (une image numérique) $x(n, m)$ de taille 128×128 dont la Transformée de Fourier Discrète (TFD) $X(k, l)$ est montrée à la figure 1. On rappelle que dans cette visualisation les basses fréquences sont situées au centre de la TFD.

1. Peut-on reconstruire $x(n, m)$ à partir de $X(k, l)$? Justifier.

2. On souhaite représenter l'image $x(n,m)$ avec moins d'échantillons pour gagner en compression. Si on sous-échantillonne $x(n,m)$ d'un facteur 2, Sera-t-il possible de reconstruire l'image de départ, à partir de la TFD calculée avec sur le signal sous-échantillonné ? Justifier.
3. On souhaite maintenant appliquer le schéma du compressive sensing pour représenter l'image. On souhaite toujours utiliser un espace de représentation fréquentiel. Décrire les étapes d'acquisition et de reconstruction du signal (on utilisera une stratégie basée sur la minimisation de la norme ℓ_1).
4. Quel est le nombre de composantes son nulles de $X(k,l)$? Sous quelle hypothèse la reconstruction basée sur la minimisation de la norme ℓ_1 repose-t-elle ? Est-elle statisfaite ici ? Avec combien de points peut-on espérer reconstruire l'image $x(n,m)$? Comparer à la borne inférieure donnée par le théorème de Shanon.

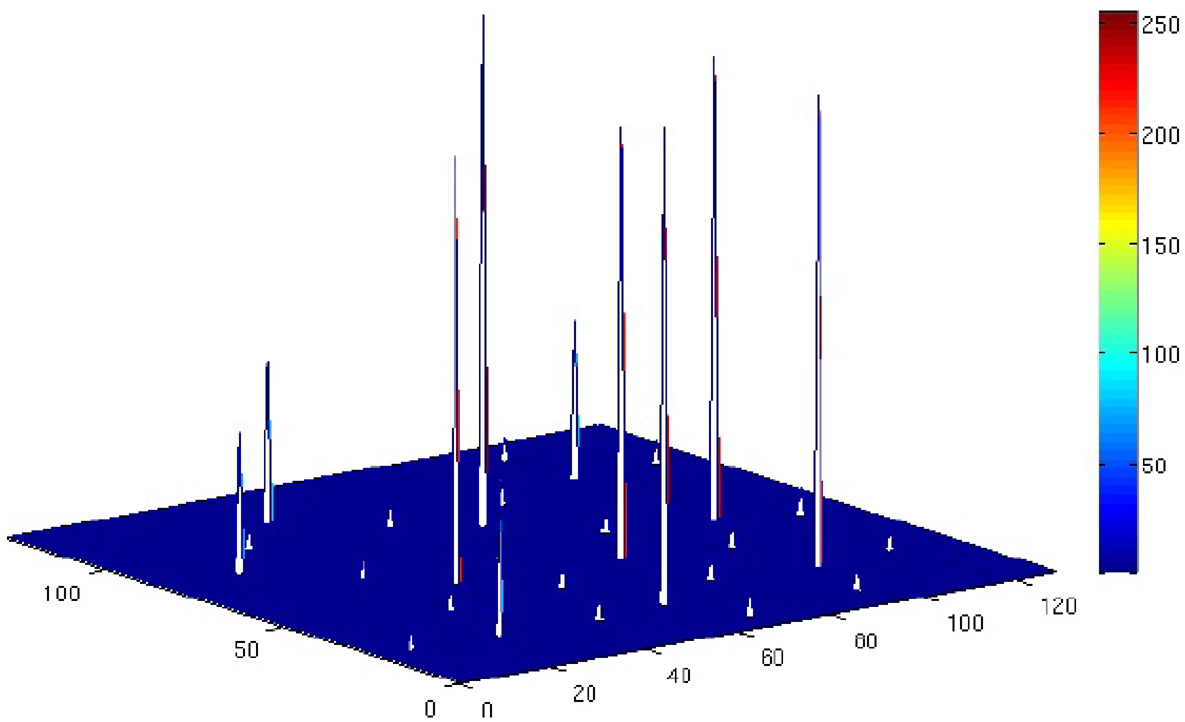

FIGURE 1 – Transformée de Fourier Discrète (TFD) $X(k,l)$ d'une image $x(k,m)$ de taille 128×128.

2^{nde} partie : Espaces d'échelles (20 points)

Exercice 3 Compréhension du cours (6 points)

Les réponses doivent être justifiées.

1. Causalité :
   (a) Expliquer ce qu'est le principe de causalité.
   (b) Pourquoi doit-il être respecté dans les représentations en espaces d'échelles ?
   (c) Montrer qu'il est bien respecté pour les représentations linéaires en espace d'échelles.
2. Sélection des échelles :

(a) Pourquoi n'y a-t-il pas une échelle optimale pour détecter un *blob* d'une taille donnée ?

(b) Donner une méthode qui permette la détection d'un *blob* à une échelle donnée et expliquer son fonctionnement.

(c) Considérons l'algorithme de Perona-Malik vu en cours. Quelle est le rôle du paramètre t et que représente-t-il ?

3. Considérons le filtre médian $\mathcal{M}_t$ de taille $t = 1, 2, \cdots$. Soit la famille $L(., t)$ définie par $L(x, y, t) = \mathcal{M}_t(I)(x, y)$ où I est une image et (x, y) les coordonnées discrètes dans le domaine de définition de l'image.
La famille $(L(., t))_{t\in\mathbb{N}^*}$ forme-t-elle un espace d'échelles admissible ? Si oui, est-ce un espace linéaire ou non linéaire ?

Exercice 4 Représentation discrète (4 points)

Soit L un signal discret obtenu par convolution itérée n fois du noyau $\begin{pmatrix}\alpha & 1-2\alpha & \alpha\end{pmatrix}$ sur un signal discret f.

1. Exprimer $L(i, 0)$, $L(i, 1)$, $L(i, 2)$ en fonction de f.
2. L est-il une représentation en espace d'échelle admissible de f (justifiez) ? Si oui, à quelle condition (justifiez) ?

Exercice 5 Signaux dérivés (4 points)

Soit une image I. On considère une famille $L = \begin{pmatrix}L^1 & L^2\end{pmatrix}^T$ qui est une représentation multi-échelles linéaire du gradient de I.

1. Pourquoi la famille L est à valeur dans $\mathbb{R}^2$?
2. Écrire le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par L en n'oubliant pas les conditions initiales.

Exercice 6 Schéma de Crank-Nicholson (6 points)

Soit une fonction $(x, t) \mapsto u(x, t)$ défini sur $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}^+$. On pose $u_j^n = u(x_0 + j\triangle x, n\triangle t)$ avec $j = \{1, \cdots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère le schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{c\triangle t}{2\triangle x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \tag{6}$$

Ce schéma est l'approximation de l'équation 1-D de la chaleur : la dérivée seconde en x a été approximée par la moyenne d'un terme au temps n et d'un terme au temps $n + 1$.

1. Ce schéma est-il implicite ou explicite ? Réécrire le schéma numérique sous la forme d'un système linéaire liant le vecteur $U^{n+1} = \left(u_1^{n+1}, \cdots, u_N^{n+1}\right)^T$ au vecteur U^n.
2. Écrire un code Matlab implémentant le schéma de Crank-Nicholson.
3. **Bonus** : montrer que ce schéma est inconditionnellement stable (indication : utiliser la relation $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$).