# Examen **A**nalyse **M**ulti-résolution et **O**ndelettes

24 janvier 2014

**Durée de l'examen** : 2h. **Portables éteints et rangés.**
**Documents autorisés** : polycopiés de cours (éventuellement annotés).
**Les deux parties sont indépendantes et à rendre sur des copies séparées.**
**Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif, et est susceptible d'être modifié.**

## 1$^{\text{ère}}$ Partie : Représentation des signaux et des images (20 points)

### Exercice 1 Propriétés des fonctions d'ondelettes (11 points)

$E = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonction réelles et de carré intégrable. $x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on rappelle que la transformée en ondelettes continue $g(a,b)$ de $x$ est définie ainsi :

$$g(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t)\ \bar{\psi}_{a,b}(t)\ dt = \langle x, \psi_{a,b} \rangle \tag{1}$$

$a \neq 0$, la fonction $\psi_{a,b}(t)$ est obtenue par translation et dilatation d'une fonction particulière appelée ondelette mère :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a})$$

Une des conditions d'admissibilité pour l'ondelette mère est qu'elle soit de carré intégrable, c'est-à-dire que son énergie (sa norme) soit finie : $||\psi||^2 = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$. On suppose ici que l'ondette mère est d'énergie unité : $||\psi||^2 = 1$.

### Norme des ondelettes

1. Calculer la norme de $\psi_{a,b}$. **Indication :** effectuer un changement de variable approprié dans l'intégrale.
   — Que peut-en en conclure ?
2. Dans une analyse multi-résolution de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on rappelle la relation entre l'ondelelette $\psi$ et la fonction d'échelle $\phi$ : $\psi(t) = \sum_k g(k) \phi_k^1(t)$, où les $\left\{ \phi_k^j \right\}$ forment une base orthonormée de $V^j$.
   — Exprimer la norme de $\psi$ en fonction des coefficients $g(k)$. **Indication :** écrire la norme en utilisant le produit ( $||\psi||^2 =< \psi; \psi >$) et utiliser la décompostion précédente.
      — Quelle contrainte ceci permet-il d'introduire sur les coefficients du filtre $g(k)$ ?

**Résolution temporelle et fréquentielle des ondelettes**

Soit une fonction $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ d'énergie $E$ unité. $X(f) = TF[x(t)]$ est sa transformée de Fourier. La résolutions temporelle $\Delta_t$ et la résolution fréquentielle $\Delta_f^2$ sont définies de la manière suivante :

$$\Delta_t = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - < t >)^2 |x(t)|^2 dt} \qquad \Delta_f = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (f - < f >)^2 |X(f)|^2 df}$$
$$< t > = \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt \qquad < f > = \int_{-\infty}^{\infty} f |X(f)|^2 df \tag{2}$$

On considère une ondelette mère $\psi(t)$, de TF $\Psi(f)$, pour laquelle $< t > = 0$ et $< f > = 0$. On note $\Delta_t^0$ la résolution fréquentielle de $\psi(t)$, $\Delta_f^0$ sa résolution fréquentielle. On cherche à calculer $\Delta_t$ et $\Delta_f$ pour $\psi_{a,b}(t)$, avec $a > 0$.

1. Montrer que $< t > = b$ pour $\psi_{a,b}(t)$.
2. Montrer que $TF[\psi_{a,b}(t)] = \Psi_{a,b}(f) = \sqrt{a}\Psi(fa)e^{-2i\pi fb}$ (utiliser les propriétés de la TF).
   — En déduire que $< f > = 0$ pour $\psi_{a,b}$.
3. Calculer la résolution temporelle $\Delta_t$ de $\psi_{a,b}$ en fonction de $\Delta_t^0$.
4. Calculer la résolution temporelle $\Delta_f$ de $\psi_{a,b}$ en fonction de $\Delta_f^0$.
5. Interpréter le résultat le résultat de $\Delta_t$ et $\Delta_f$ pour les différentes fonctions d'ondelettes dilatées et contractées. Justifier le qualificatif d'analyse multi-résolution et préciser son intérêt (5 lignes max).

## Exercice 2 Régularisation et parcimonie (6 points)

On considère une fonction d'apprentissage consistant à minimiser la fonction $\mathcal{L}(w)$ suivante, où $w$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{L}(w) = R(w) + D(w) \tag{3}$$

où $D(w)$ est un terme pour minimiser une erreur relative au données, et $R(w)$ est un terme de régularisation. On considère que les deux termes $D(w)$ et $R(w)$ sont convexes en $w$, si bien que la fonction $\mathcal{L}(w)$ est convexe.

1. Donner l'expression de $D(w)$ et $R(w)$ dans les deux étapes de l'algorithme K-SVD.
2. On va minimiser la fonction $\mathcal{L}(w)$ par descente de gradient
   (a) Si $R(w) = ||w||_2^2$, exprimer et représenter graphiquement $\frac{\partial R}{\partial w_j}$.
   (b) si $R(w) = ||w||_1$, exprimer et représenter graphiquement $\frac{\partial R}{\partial w_j}$.
3. Que vaut $\frac{\partial R}{\partial w_j}$ quand $w_j \to 0$ pour $R(w) = ||w||_2^2$ et $R(w) = ||w||_1$ ? Déduire en le justifiant quel type de régulariseur favorise des solutions parcimonieuses.

## Exercice 3 Compressive Sensing et échantillonnage (3 points)

On considère l'image de la figure 1, qui représente la Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'une image numérique de taille $128 \times 128$.

1. D'après le théorème de Shannon, quel est le nombre minimal de pixels à échantillonner dans l'image originale pour assurer une reconstruction parfaite ?
2. Expliquer comment on va, avec des technique de compressive sensing, pouvoir échantillonner cette image avec un nombre de mesures inférieur à la limite définie par le théorème de Shannon (15 lignes max). Précisez notamment :
   — L'*a priori* sur le signal qui est expoité pour réaliser l'échantillonnage.
   — Les grandes lignes de l'algorithme d'acquisition et de reconstruction, ainsi que le nombre de mesures nécessaire.

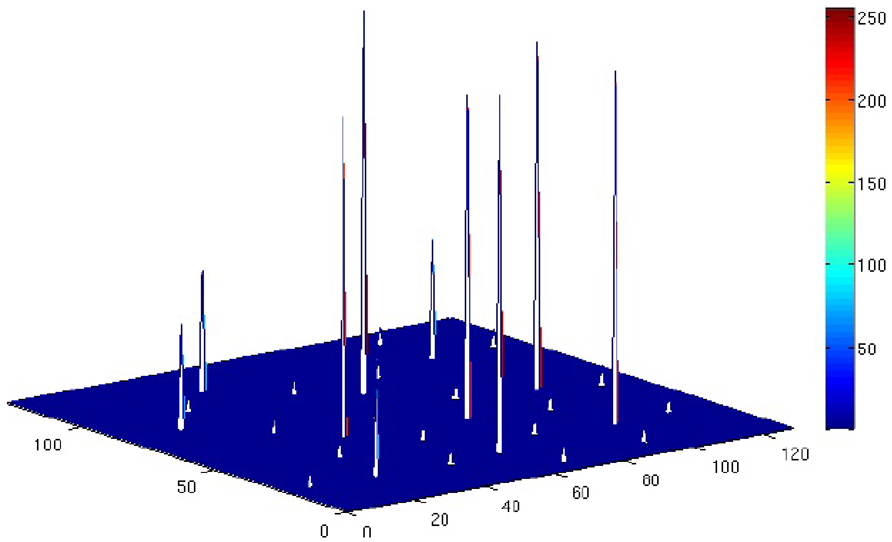


FIGURE 1 – Transformée de Fourier Discrète (TFD) $X(k,l)$ d'une image $x(k,m)$ de taille $128 \times 128$.

## $2^{\text{nde}}$ partie : Espaces d'échelles (20 points)

### Exercice 4 Compréhension du cours (8 points)

1. Quelles propriétés *axiomatiques* sont communes à tous les espaces d'échelles discrets et continus vus en cours ?
2. Quel est la différence entre une représentation en espace d'échelles linéaire et une représentation en espace d'échelle non linéaire ?
3. Pour les problèmes de traitement d'images qui suivent, citez une méthode du cours pertinente pour résoudre le problème. Dans le cas d'un algorithme paramétré, donnez un jeu de paramètres convenable.
   — détecter des structures d'une taille connue ?
   — segmenter une image en régions homogènes ?
   — détecter des contours ?
   — remplir des régions manquantes ?
4. Soit un espace d'échelle linéaire. Quelle est la transformation qui permet de passer d'une représentation à l'échelle $t_1$ à une représentation à l'échelle $t_2$, avec $t_1 < t_2$ ?

### Exercice 5 Noyau exponentiel (6 points)

Soit $f_t(x) = C \exp\left(-\frac{|x|}{t}\right)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec $t > 0$ et $C$ est une constante positive.

1. Calculer $C$ pour que $\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 1$.
2. Soit la famille $L(x,t) = f_t \star L_0(x)$ où $L_0$ est un signal à traiter. La famille $L$ est-elle une représentation en espace d'échelles du signal $L_0$ ? Justifiez votre réponse.
3. Considérons maintenant le noyau discret, à support fini, $f_t(n), n = -N \cdots N$. Ce noyau vérifie-t-il les axiomes des noyaux d'espaces d'échelles discrets ?
4. Considérons maintenant le noyau discret, à support infini, $f_t(n), n \in \mathbb{Z}$ et notons $e^{\frac{1}{t}} = e_t$. Nous souhaitons calculer sa série génératrice.
   — Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_t^{-n} z^n$. **Indication** : c'est une série géométrique.
   — Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_t^{-n} z^{-n}$.
   — En déduire $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e_t^{-|n|} z^n$.

   À partir d'un théorème du cours, en déduire que le noyau $f_t(n)$ est un noyau d'espace d'échelle discret.

### Exercice 6 Discrétisation de l'équation 2D de diffusion (6 points)

Considérons une famille d'images $(x,y) \mapsto I(x,y,t), (x,y) \in [0,1]^2$, paramétrée par l'échelle $t$. Elle vérifie l'équation 2D de diffusion :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,y,t) = \frac{1}{2}\nabla^2 I(x,y,t) \quad t > 0 \tag{4}$$
$$I(x,y,t) = I_0(x,y) \tag{5}$$

où $I_0$ est l'image que l'on souhaite traitée.

Pour discrétiser ce système on considère la grille régulière de points $(x_k, y_l)$ avec $x_k = k\triangle_x$, $y_l = l\triangle_y$, $k = 0 \cdots N-1$ et $l = 0 \cdots N-1$. $\triangle_x$ et $\triangle_y$ sont respectivement les pas de discrétisation dans la direction $x$ et $y$.

Le paramètre de temps est discrétisé par $t = n\triangle_t$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\triangle_t$ le pas de temps, soit un réel strictement positif.

1. Exprimez $\triangle_x$ et $\triangle_y$ en fonction de $N$. Qu'en déduisez-vous sur la forme du domaine spatial ?
2. Pour approcher l'équation (4), on considère un schéma centré en espace et avant en temps. Donnez ce schéma numérique.
3. Montrer que ce schéma est stable à une condition sur $\triangle_t$, $\triangle_x$ et $\triangle_y$.
   **Indication** : on étudiera les solutions de la forme $I^n_{k,l} = \xi^n \exp(ik\triangle_x + il\triangle_y)$, avec $i = \sqrt{-1}$.