

TADI : examen réparti n°2

Première session

12 février 2015

Durée de l'examen : 1h. Portables éteints et rangés.

Documents autorisés : une page manuscrite recto-verso de notes de cours sur les ondelettes et sur les espaces d'échelles.

Les ?? parties sont indépendantes et à rendre sur des copies séparées.

Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif, et est susceptible d'être modifié.

Partie 3 : Ondelettes

Exercice 1 Ondelette de Morlet (5 points)

L'ondelette de morlet ψ est définie de la manière suivante :

$$\psi(t) = e^{i2\pi f_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \quad (1)$$

La famille d'ondelettes $\{\psi_{a,b}\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}$ est obtenue par translation et dilatation de l'ondelette mère ψ : $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a})$. On va s'intéresser à la résolution temps-fréquence des $\{\psi_{a,b}\}$.

Rappels :

— La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne :

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow TF[g_\sigma(t)] = G(f) = e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$

— Soit une fonction x et $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$. La dispersion temporelle $\sigma_{x,t}$ (resp. fréquentielle $\sigma_{X,f}$) pour une fonction x s'écrit :

$$\sigma_{x,t} = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |x(t)|^2 dt}. \text{ Pour une gaussienne } g_\sigma(t), \text{ on a } \sigma_{g,t} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}.$$

$$\sigma_{X,f} = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (f - \langle f \rangle)^2 |X(f)|^2 df}, \text{ où } X \text{ est la transformée de Fourier de } x.$$

1. Montrer que la transformée de Fourier Ψ de l'ondelette de Morlet ψ est une gaussienne,

i.e $\Psi(f) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(f-\mu_f)^2}{2\sigma_f^2}}$, avec μ_f et σ_f à expliciter. Représenter Ψ graphiquement.

2. À partir de Ψ , déterminer la dispersion fréquentielle $\sigma_{\Psi,f}$ l'ondelette mère ψ .

— En utilisant l'inégalité d'Heisenberg, en déduire une borne inférieure sur la dispersion temporelle $\sigma_{\psi,t}$ de ψ .

— On supposera que la borne inférieure sur la dispersion temporelle $\sigma_{\psi,t}$ est atteinte. Représenter dans le plan temps-fréquence la boîte d'Heisenberg de ψ .

3. D'après le cours, que valent les dispersions temporelles et fréquentielles des fonctions $\psi_{a,b}$ par rapport aux dispersions temporelles et fréquentielle de l'ondelette mère ψ ?

- Représenter dans le plan temps-fréquence les boîtes d’Heisenberg de $\psi_{a,b}$ pour $a = \frac{1}{2}$.
- Justifier le terme d’analyse multi-résolution résultant d’une telle transformation en ondelettes. Comparer en particulier les dispersions temporelles et fréquentielles à celles découlant d’une analyse par transformée de Fourier ou de transformée de Fourier fenêtrée.

Exercice 2 Compressive Sensing et échantillonnage (5 points)

On considère une image numérique x de taille 128×128 dont la Transformée de Fourier Discrète (TFD) X est montrée à la figure 1. On rappelle que dans cette visualisation les basses fréquences sont situées au centre de la TFD. On souhaite représenter x avec un "petit" nombre de coefficients, tout en assurant une reconstruction parfaite de l’image à partir de ces coefficients.

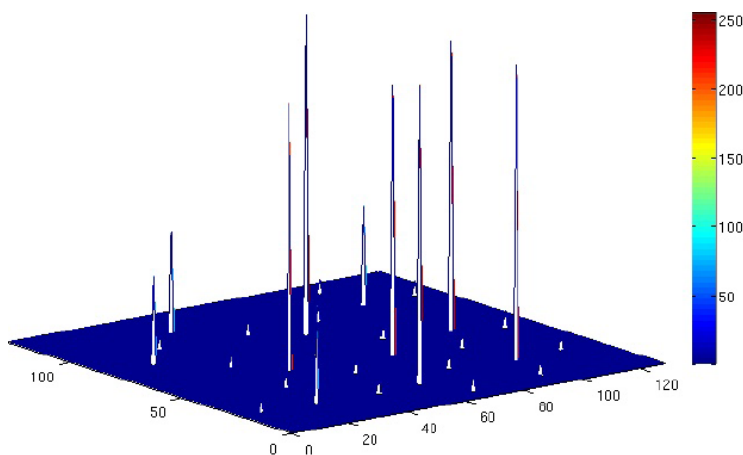


FIGURE 1 – Transformée de Fourier Discrète (TFD) X d’une image x de taille 128×128 .

1. Si on sous-échantillonne x d’un facteur 2, sera-t-il possible de reconstruire parfaitement l’image de départ à partir de sa TFD? Justifier.
2. Quel est le nombre K de composantes non nulles des coefficients $X(k, l)$ de la TFD de x ?
— Si on utilise une technique de compressive sensing basée sur la minimisation de la norme ℓ_1 , on peut espérer reconstruire parfaitement l’image avec un nombre de mesures $M \geq K \log(\frac{N}{K})$. Quel est la borne inférieure sur M dans notre cas?
3. Comparer la borne inférieure sur le nombre de mesures nécessaire pour reconstruire un signal en utilisant des techniques de compressive sensing à celle définie par le théorème de Shannon. Quelle est l’hypothèse sous-jacente pour que ceci soit possible?

Partie 4 : Espaces d’échelles

Exercice 3 Questions de cours (5 points)

1. Soit l’équation aux dérivés partielles suivante :

$$\begin{aligned} f(x, y, 0) &= I(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) &= \frac{1}{2} \nabla^2 f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega, t > 0 \end{aligned}$$

où I est une image définie sur le domaine Ω . Donner une solution de cette équation à l'aide d'un opérateur linéaire et invariant par translation. Cette représentation est-elle unique? Justifier.

2. Proposer une méthode de détection de contours qui, d'une part est multi-échelles, et d'autre part qui détermine automatiquement l'échelle optimale. On décrira précisément la méthode.
3. Quelles sont les différences entre un espace d'échelles linéaire et un espace d'échelles non-linéaire? Pour chacun d'entre eux, on donnera un exemple d'application en traitement d'images.
4. On rappelle la définition du détecteur de Harris-Laplace :

$$\begin{aligned} R(L_t) &= \det(H(L_t)) - \tau \operatorname{tr}(H(L_t)) \\ H(L_t) &= G_\sigma \star (\nabla L_t^T \nabla L_t) \end{aligned}$$

où L_t est la représentation à l'échelle t de l'image à traiter, G_σ est un noyau gaussien d'écart-type σ . $\det()$ et $\operatorname{tr}()$ sont respectivement le déterminant et la trace d'une matrice. Expliquer le rôle des paramètres σ , τ et t .

Exercice 4 Exercice (5 points)

Le but de cet exercice est de définir un espace d'échelles pour les images multispectrales. Dans une image multispectrale à n bandes, on trouve un n -uplets de valeurs à chaque pixel, et à chacune de ces valeurs correspond une acquisition dans l'une des n bandes disponibles. Une telle image est donc représentée par une fonction définie sur \mathbb{R}^3 , $I(x, y, \lambda)$, deux variables (x, y) pour le domaine spatial et une variable λ pour le domaine spectral.

Dans un premier temps, on considère que I est une fonction continue sur ses 3 variables. On souhaite maintenant construire une représentation multi-échelles en λ .

1. Définir la famille de fonctions $\lambda \mapsto L(x, y, \lambda, s)$ telle qu'elle soit une représentation multi-échelles linéaire, invariante par translation et continue de $\lambda \mapsto I(x, y, \lambda)$ et s est un paramètre d'échelle spectral. Donner l'équation aux dérivées partielles dont L est la solution.

On souhaite maintenant appliquer cette représentation aux images couleurs RGB. Une image RGB est une image à trois bandes, une bande rouge, une bande verte et une bande bleue. Donc $n = 3$. Pour appliquer ce qui précède, on choisit d'**échantillonner** le noyau gaussien et on s'intéresse à la représentation multi-échelles sur le paramètre de bande λ . Puisque l'espace des bandes est de petite dimension (3), on utilisera la convolution **circulante**¹ pour calculer les représentations multi-échelles sur le paramètre s .

2. Exprimer la représentation discrète L à l'échelle spectrale s par une convolution discrète sur $I(x, y)$. Quelle est la taille du noyau de convolution?
3. Application numérique : donner les valeurs du noyau de convolution pour les trois valeurs d'échelles suivantes :
 - $s = 1$ ($\exp(-1) \approx 0.32204$),
 - $s = 10$ ($\exp(-1/10) \approx 0.90484$),
 - $s = 100$ ($\exp(-1/100) \approx 0.9904$).
4. Lorsque s est grand, quel filtre classique la convolution précédente approche-t-elle?
5. Qu'en déduisez-vous sur l'aspect des couleurs de L lorsque s est grand? À quoi peut servir une telle représentation?

1. c'est-à-dire que le domaine sur λ est supposé périodique : $I(x, y, i) = I(x, y, (i + 3) \bmod 3) \forall i \in \mathbb{Z}$