TD1: Fourier et applications

Formulaire :

$$\begin{aligned}
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})\\
\cos(p)-\cos(q) &= -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})\\
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})\\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})\\
\cos(x) &= \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}\\
\sin(x) &= \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\
\cos(a)\cos(b) &= 0.5(\cos(a+b)+\cos(a-b))\\
\sin(a)\sin(b) &= 0.5(\cos(a-b)-\cos(a+b))\\
\sin(a)\cos(b) &= 0.5(\sin(a+b)+\sin(a-b))\\
X(f): f\mapsto X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt\\
IPP: \int u'v &= [uv]-\int uv'
\end{aligned}$$

Exercices essentiels : exo 3.1, exo 4, exo 5.

Exercice 1 – Séries de Fourier

1. Soit E, l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions continues de $[-\pi,\pi[$ vers $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire :
$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g(t)}dt$$
Montrer que la famille définie par $\{\cos(nx) \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\sin(nx)\mid n\in\mathbb{N}^\star\}$ est orthogonale. Est-ce une base F, l'espace vectoriel des fonctions 2π périodiques ?
Proposer une base orthonormée de F.
2. La serie de fourier associée à une fonction f peut s'écrire : $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ ou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{inx}$. Écrire les coefficient c_n en fonction des a_n et des b_n.
3. Montrer que $\left\{\exp(\frac{2i\pi kt}{T})\right\}$, $k\in\{-\infty;+\infty\}$ forment une base orthonormée de $L^2([0,T])$

Exercice 2 – Transformée de Fourier

1. Démontrer que $\mathrm{TF}(x(t-\tau)) = \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau} X(f)$
2. Démontrer que x paire (resp. impaire) $X(f)$ paire (resp. impaire).
3. Pour des fonctions x satifaisant $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t)) = 0$, démontrer que $\mathrm{TF}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = 2i\pi f X(f)$
   Qu'est ce que cela signifie graphiquement sur la TF ? Illustrer votre propos sur un exemple.
4. Montrer que $\left(\frac{dX(f)}{df}\right) = -2i\pi TF\left[t\cdot x(t)\right]$.

Exercice 3 – TF usuelles

Calculer les transformées de Fourier suivantes (après avoir dessiné rapidement la forme de la fonction) :

1. $Rect\left(\frac{t}{T}\right)$, où $Rect(t)$ est la fonction "Porte" : $Rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$
3. soit $g(t) = e^{-b^2t^2}$, montrer que $G(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{|b|}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{b^2}}$.
   — Vérifier que $g'(t) + 2b^2 t x(t) = 0$.
   — En déduier que $G'(f) + \frac{2\pi^2}{b^2} f G(f) = 0$, conclure
4. $k(t) = \mathrm{e}^{-at}\mathbb{1}_{t\geq 0}$
5. $z(t) = \{t \text{ si } t \in]-a,\ a[,\ 0 \text{ sinon}\}$

Exercice 4 – Résolution fréquentielle et fenêtrage

On considère la fonction sinusoïdale $x(t) = cos(2\pi f_0 t)$ et la fonction porte $r(t) = Rect\left(\frac{t}{L}\right)$.
On rappelle que $X(f) = \frac{1}{2}\cdot[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$.

1. Calculer $TF\left[x(t)\cdot r(t)\right]$
2. Qu'en concluez-vous sur la résolution fréquentielle ?

Exercice 5 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Rappel : $STFT[x(t)] = X(f,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\bar{w}(t-b)e^{-2i\pi f t}dt$

Reconstruction du signal On considère la fenêtre $w \in L_2; |w|$ fonction paire et $||w||^2 = 1$.

— Montrer l'inversibilité de la STFT par sommation des projections (non trivial)

Résolution temporelle vs fréquentielle

On considère le signal 1d suivant :
$x(t) = cos(2\pi f_1 t)\cdot Rect(\frac{t-T_1}{2T_1}) + cos(4\pi f_1 t)\cdot Rect(\frac{t-3T_1}{2T_1})$, avec $f_1 = \frac{1}{T_1}$.

— Représenter le signal $x(t)$
— Calculer et représenter les spectogrammes de $x(t)$ pour des fenêtres temporelles disjointes de taille : $\frac{4}{f_1}$ (1 fenêtre), $\frac{2}{f_1}$ (2 fenêtres), $\frac{1}{f_1}$ (4 fenêtres), $\frac{1}{2f_1}$ (8 fenêtres)
— Avec quelles fenêtres précédentes peut-on correctement séparer les deux composantes fréquentielles en temps et en fréquence ? Quel est ici le meilleur compromis ?