TD 2 AMO : Analyses multi-résolution, Ondelettes

Exercice 1 – Ondelettes de Haar 1D

On considère l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$: $E = L^2(\mathbb{R})$ Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{1}$$

et $\phi_k^j(t) = \sqrt{2^j}\phi(2^j t - k)$:

$$\phi_k^j(t) = \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{pour} \quad \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{2}$$

Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ Montrer que ϕ est une fonction d'échelle admissible pour construire une analyse multi-résolution de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Que représentent V^0, V^j ? Rappel : l'analyse multirésolution d'un espace vectoriel E :

1. $\forall j \in \mathbb{Z} \ \ V^j \subseteq V^{j+1}$
2. $\lim\limits_{j \to -\infty} V^j = \bigcap\limits_{i=--\infty}^{+\infty} V^j = \{0\}$
3. $\lim\limits_{j \to +\infty} V^j = \bigcup\limits_{i=--\infty}^{+\infty} V^j = E$
4. Il existe une fonction ϕ telle que $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V^0
5. $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V^j \Leftrightarrow f(./2) \in V^{j+1}$
6. $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f \in V^j \Leftrightarrow f(. - 2^j k) \in V^j$

Base orthonormée des fonctions d'échelle de Harr Pour simplifier, mais son perte de généralité [1], on va considérer l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur $[0,1[$: $E = L^2([0,1[)$. Soit :

— V^0 l'espace vectoriel des fonctions constantes sur $[0,1[$ (dimension 1)
— V^1 l'espace vectoriel des fonctions constantes sur $[0,\frac{1}{2}[$ et sur $[\frac{1}{2},1[$ (dimension 2)
— V^j l'espace vectoriel des fonctions constantes sur $\left\{[\frac{k}{2^j},\frac{k+1}{2^j}[\right\}_{k \in \{0;2^j-1\}}$ (dimension 2^j)

1. Vérifier que les $(\phi_k^j)_{k \in \{0;2^j-1\}}$ forment une base orthonormée de V^j, *i.e.* que les (ϕ_k^j) constituent famille génératrice de V^j, une famille libre, que $<(\phi_k^j);(\phi_h^j)>= 0\,; \forall (k,h) \in \left\{0; 2^j-1\right\} \times \left\{0; 2^j-1\right\}$, et que la norme des fonctions de base est unité.
2. Représenter les $(\phi_k^1)_{k \in \{0;1\}}$, formant une base de V^1 et les $(\phi_k^2)_{k \in \{0;3\}}$, formant une base de V^2.

Base orthonormée des ondelettes de Haar

1. Déterminer un ensemble de 2 fonctions $(\psi_k^1)_{k \in \{0;1\}}$ formant une base orthonormée d'un EV W^1 tel que $V^2 = V^1 \oplus W^1$.
   — Exprimer les $(\phi_k^1)_{k \in \{0;1\}}$ et $(\psi_k^1)_{k \in \{0;1\}}$ en fonction des $(\phi_k^2)_{k \in \{0;3\}}$ (compression)
   — Exprimer les $(\phi_k^2)_{k \in \{0;3\}}$ en fonction des $(\phi_k^1)_{k \in \{0;1\}}$ et $(\psi_k^1)_{k \in \{0;1\}}$ (décompression)
   — Déterminer la fonction ψ telle que $\psi_k^1(t) = \psi(2t-k)$.

1. Se ramener à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est trival puisqu'il suffit de considérer les translations $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

2. **<u>Généralisation</u>** : En déduire la défnintion des 2^j **ondelettes de Haar** $(\psi_k^j)_{k\in\{0;2^j-1\}}$ **formant une base orthonormée** de W^j telles que $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$.
   — Exprimer les (ϕ_k^j) et des (ψ_k^j) en fonction des (ϕ_k^{j+1}) (compression)
   — Exprimer les (ϕ_k^{j+1}) en fonction des (ϕ_k^j) et des (ψ_k^j) (décompression)
   — Exprimer les coefficients (s_k^j) et (d_k^j) en fonction des (s_k^{j+1}) (compression)
   — Exprimer les coefficients (s_k^{j+1}) en fonction des (s_k^j) et des (d_k^j) (décompression)
   — La relation liant coefficients dans $V^j \oplus W^j$ à ceux dans V^{j+1} est-elle la même que celle liant les fonctions de base ? Expliquer pourquoi.

Application : décomposition du signal dans la base orthonormée des ondelettes de Haar

Soit le signal discret suivant $S = [2\ 4\ 8\ 12\ 14\ 0\ 2\ 1]$. Décomposer S dans l'espace $V^0 \bigoplus_{j=0}^{2} W^j$.

Représenter graphiquement le signal obtenu aux différents niveaux de résolution (*i.e.* S dans V^2, V^1 et V^0), ainsi que les détails (*i.e.* S dans W^2, W^1 et W^0).
Le module de la Transformée de Fourier Discrète de S est $|TF[S]| = [9\ 8\ 11\ 24\ 43\ 24\ 11\ 8]$. Quelle est l'interprétation en terme d'espace échelle de la décomposition dans la base de Haar, par rapport au signal de départ et à la TFD ?

Exercice 2 – Performances de la transformée en ondelettes

— Quelle est la complexité de l'algorithme de décomposition et de reconstruction ? Comparer avec la DFT et la FFT.
— Quelle est la place mémoire occupée (nombre de coefficients) ? Comparer avec un arbre binaire complet.

Exercice 3 – Base de Haar 2D : ondelettes pour les images

— Donner le pseudo-code de la décomposition standard d'une image.
— Donner le pseudo-code de la décomposition non standard d'une image.
— Donner la base de Haar 2D de la décomposition standard d'une image.
— Donner la base de Haar 2D de la décomposition non standard d'une image.

Exercice 4 – Compression avec les ondelettes

On considère la décomposition d'une fonction f de V^j (dimension $N = 2^j$) dans la base orthonormée des ondelettes de Haar. La compression est effectuée sur les coefficients $d_{k\in\{0;N^j-1\}}$: on forme f_c en remplaçant d_k (dimension N) par un vecteur dans lequel beaucoup de coefficients sont nuls, et on ne garde que $K < N$ coefficients. L'erreur de compression est mesurée par :

$$\varepsilon = \|f - fc\|_2 \tag{3}$$

Quels sont les K coefficients à conserver afin de minimiser ε ?